BAB 8

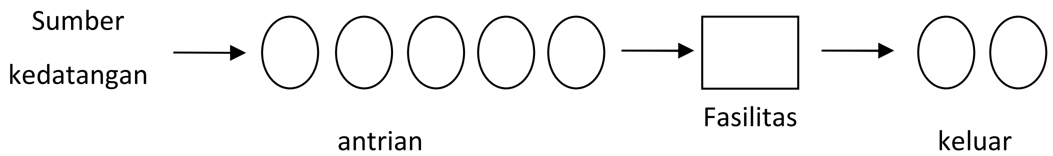
TEORI ANTRIAN
(*QUEUEING THEORY*)

Analisis antrian pertama kali diperkenalkan oleh A.K. Erlang (1913) yang mempelajari fluktuasi permintaan fasilitas telepon dan keterlambatan pelayanannya. Saat ini analisis antrian banyak diterapkan di bidnag bisnis (bank, supermarket), industri (palayanan mesin otomatis), tansportasi (pelabuhan udara, pelabuhan laut, jasa-jasa pos) dan lain-lain.

Analisis antrian memberikan informasi probabilitas yang dinamakan *operation characteristics,* yang dapat membantu pengambil keputusan dalam merancang fasilitas pelayanan antrian untuk mengatasi permintaan pelayanan yang fluktuatif secara random dan menjaga keseimbangan antara biaya pelayanan dan biaya menunggu.

1. KOMPONEN PROSES ANTRIAN

Komponen dasar proses antrian adalah kedatangan, pelayan dan antri. Komponen-komponen ini disajikan pada gambar berikut:



Gambar 1. Komponen Proses Antrian

1. Kedatangan
   Setiap masalah antrian melibatkan kedatangan, misalnya orang, mobil, atau panggilan telepon untuk dilayani. Unsur ini sering disebut proses input. Proses input meliputi sumber kedatangan atau biasa dinamakan calling population, dan cara terjadinya kedatangan yang umumnya merupakan proses random.

2. Pelayan
   Pelayan atau mekanisme pelayanan dapat terdiri dari satu atau lebih pelayan, atau satu atau lebih fasilitas pelayanan. Contohnya pada sebuah check out counter dari suatu supermarket terkadang hanya ada seorang pelayan, tetapi bisa juga diisi seorang kasir dengan pembantunya untuk memasukkan barang-barang ke kantong plastik. Sebuah bank dapat mempekerjakan seorang atau banyak teller. Di samping itu, perlu diketahui cara pelayanan dirampungkan, yang kadang-kadang merupakan proses random.

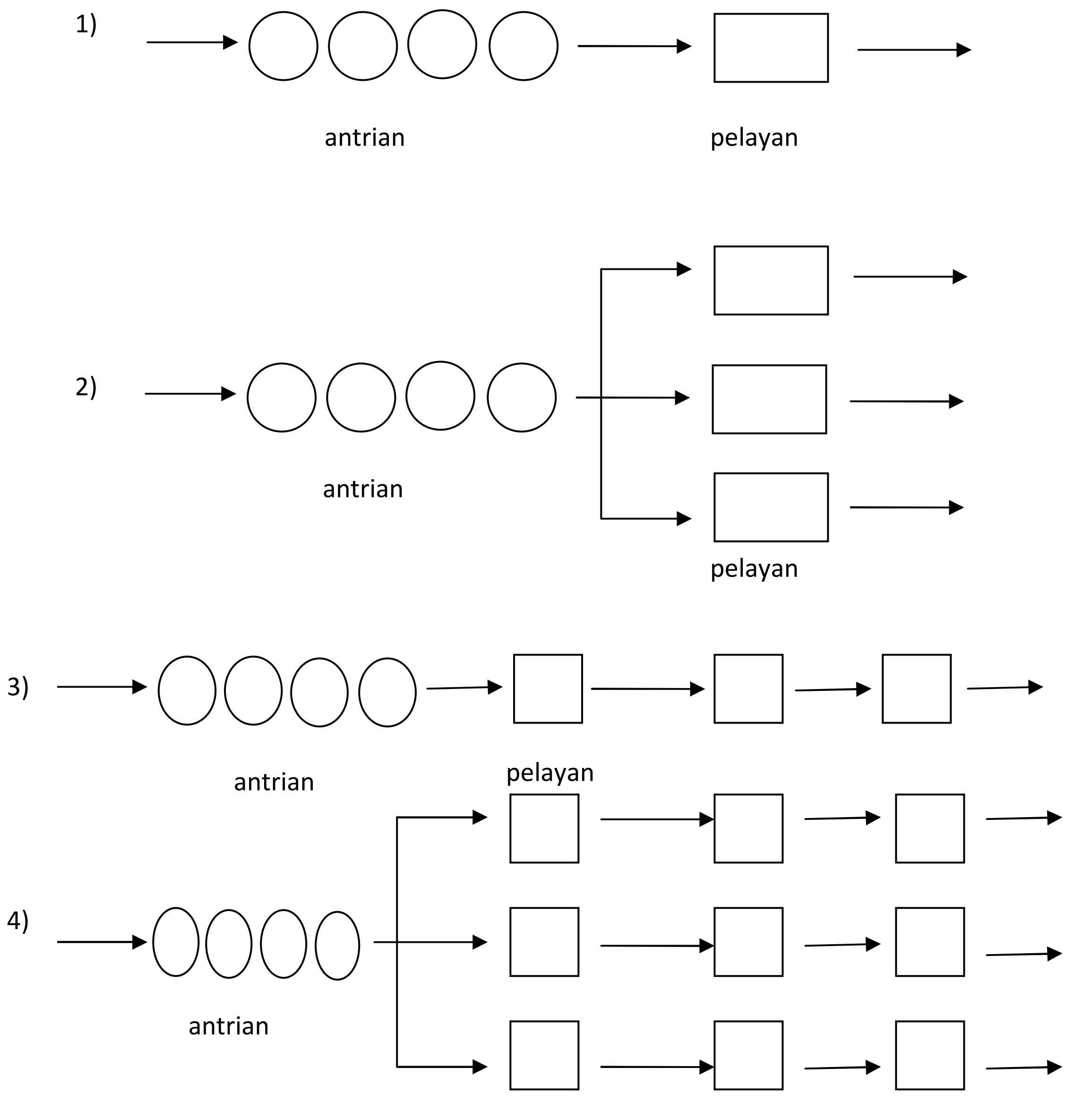
3. Antri
   Inti dari analisis antrian adalah antri itu sendiri. Timbulnya antrian terutama tergantung dari sifat kedatangan dan proses pelayanan. Penentu antrian lain yang penting adalah disiplin antri. Disiplin antri adalah aturan keputusan yang menjelaskan cara melayani pengantri, misalnya datang awal dilayani dulu yang lebih dikenal dengan singkatan FCFS, datang terakhir dilayani dulu LCFS, berdasar prioritas, berdasar abjad, berdasar janji, dan lain-lain. Jika tak ada antrian berarti terdapat pelayan yang nganggur atau kelebihan fasilitas pelayanan.

2. STRUKTUR DASAR PROSES ANTRIAN

Proses antrian pada umumnya dikelompokkan ke dalam empat struktur dasar menurut sifat-sifat fasilitas pelayanan, yaitu:

1. Satu saluran satu tahap
2. Banyak saluran satu tahap
3. Satu saluran banyak tahap
4. Banyak saluran banyak tahap

Keempat kelompok ini ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 2. Struktur Dasar Proses Antrian

Banyaknya saluran dalam proses antrian adalah jumlah pelayanan paralel yang tersedia. Banyaknya tahap menunjukkan jumlah pelayanan berurutan yang harus dilalui oleh setiap kedatangan. Ini berarti gambar di atas menunjukkan struktur antrian dengan tiga saluran satu tahap. Empat kaegori yang disajikan di atas merupakan kategori dasar. Masih terdapat banyak variasi struktur antrian yang lain.

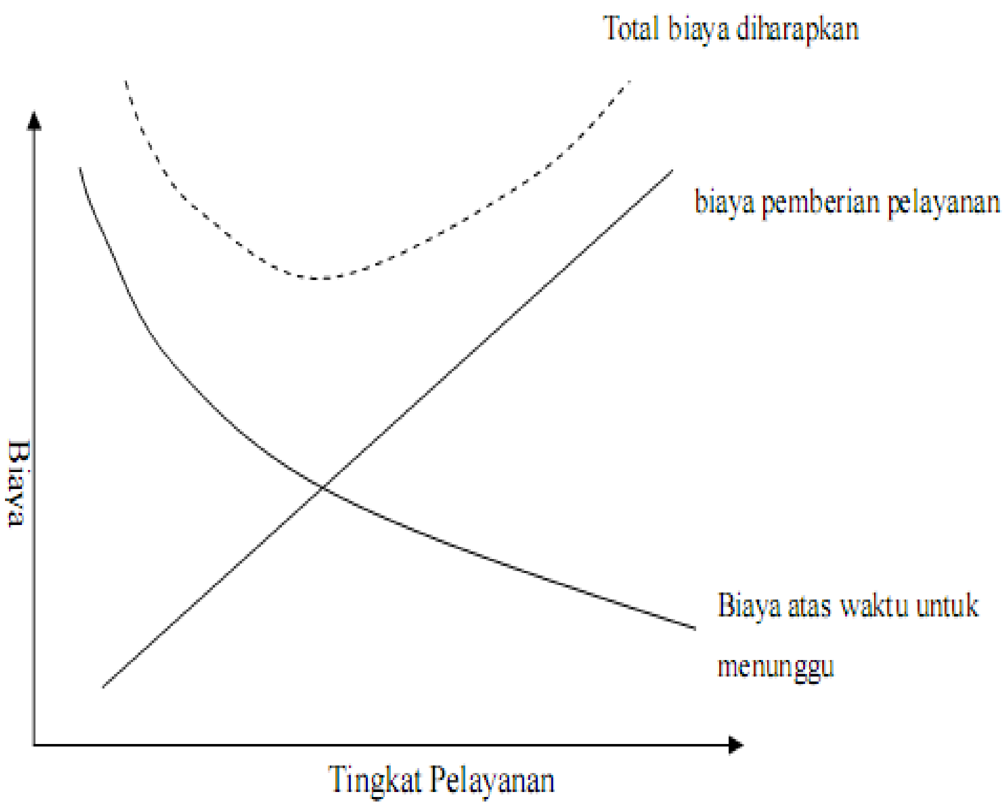
3. KERANGKA KEPUTUSAN MASALAH ANTRIAN

Berbeda dengan *mathematical programming*, tak ada pengetahuan terpadu yang berhubungan dengan optimisasi masalah antrian. Sehingga kebanyakan literatur teori antrian menekankan penemuan *operating characteristics* atau ciri-ciri operasi sistem antrian. Ciri-ciri operasi menjelaskan bekerjanya sistem dalam bentuk ukuran-ukuran, misalnya rata-rata waktu menunggu, waktu nganggur pelayanan dan lain-lain. Namun ukuran prestasi sistem sesungguhnya hanya input dalam suatu kerangka konsep yang lebih luas.

Ciri-ciri operasi yang akan dipelajari adalah:
P_n = probabilita n pengantri dalam sistem
L = rata-rata banyaknya pengantri dalam sistem
L_q = rata-rata banyaknya pengantri dalam antrian
W = rata-rata waktu menunggu dalam sistem (antri + pelayanan)
P_o atau I = proporsi waktu nganggur pelayan (tidak ada pengantri)

Kebanyakan analisis masalah antrian akhirnya sampai pada pertanyaan bagaimana merancang fasilitas pelayanan atau berapa tingkat pelayanan yang seharusnya disediakan. Jika variabel keputusannya adalah tingkat pelayanan, maka model harus mengidentifikasi hubungan antara tingkat pelayanan dengan parameter dan variabel-variabel yang relevan. Kriteria evaluasi keputusan dari model ini adalah *total expected cost*. Hubungan variable keputusan (tingkat pelayanan) dengan kriteria evaluasi (*total expected cost*) ditunjukkan pada gambar. Terlihat bahwa total expected cost merupakan jumlah dari dua biaya yang berlainan yaitu (1) biaya pelayanana dan (2) biaya menunggu.

Jadi jelas bahwa tingkat pelayanan yang disarankan adalah yang menyebabkan *total expected cost* terendah. Namun, ini tidak berarti analisis ini dapat menentukan biaya total terendah secara tepat sebab operating characteristic yang diperoleh hanya merupakan angka rata-rata dan sehingga tidak pasti. Dengan demikian analisis antrian bukanlah suatu teknik optimisasi melainkan hanya penyedia informasi.



1. Biaya Pelayanan

Suatu supermarket yang ingin menambah *checkout counter* perlu membiayai seluruh perlengkapan *counter* tambahan dan menggaji pelayan baru. Ini berarti jika tingkat pelayanan diperbaiki, biaya pelayanan akan bertambah.

Biaya pelayanan dapat juga dilihat dari sisi pandang yang lain. Jika tingkat pelayanan bertambah, waktu nganggur pelayan diperkirakan juga bertambah, yang berarti suatu kenaikan dalam *opportunity cost* karena tidak mengalokasikan pelayan ke kegiatan produktif yang lain.

Cara yang digunakan untuk menghitung biaya pelayanan dapat berbeda untuk kasus yang berbeda. Cara apapun yang dipakai seharusnya memberikan jumlah yang sama.

2. Biaya menunggu

Umumnya terdapat hubungan terbalil antara tingkat pelayanan dan waktu menunggu. Namun terkadang sulit menyatakan secara ekspilit biaya menunggu per unit waktu. Biaya menunggu dapat diduga secara sederhana sebagai biaya kehilangan keuntungan bagi pengusaha, atau biaya turunnya produktivitas bagi pekerja. Ini berarti serupa dengan biaya pelayanan, dimana penentuannya dapat berbeda dari satu kasus ke kasus lain.

Sehingga, masalah keputusannya merupakan konflik antara biaya menunggu bagi pengantri melawan biaya pelayanan. Dan model keputusan masalah antrian dirumuskan sebagai:

Minimumkan $\in (C) = I\,C_i + W\,C_w$

Keterangan:

$\in (C)$ = total expected cost untuk tingkat pelayanan tertentu
I = waktu nganggur pelayan yang diharapkan
C_i = biaya nganggur pelayan per unit waktu
W = waktu menunggu yang diharapkan untuk semua kedatangan
C_w = biaya menunggu pengantri per unit waktu.

4. ASUMSI-ASUMSI TEORI ANTRIAN

1. Distribusi kedatangan

Model antrian adalah model probabilistik (stochastic) karena unsur-unsur tertentu proses antrian yang dimasukkan dalam model adalah variabel random. Variabel random ini sering digambarkan dengan distribusi probabilitas.

Baik kedatangan maupun waktu pelayanan dalam suatu proses antrian pada umumnya dinyatakan sebagai variabel random. Asumsi yang biasa digunakan dalam kaitannya dengan distribusi kedatangan (banyaknya kedatangan per unit waktu) adalah distribusi Poisson. Rumus umum distribusi probabilitas Poisson adalah:

$P\ (x) = \dfrac{e^{-\lambda}\ \lambda^{x}}{x!}$, dimana

x = banyaknya kedatangan
P (x) = probabilita kedatangan
λ = rata-rata tingkat kedatangan
e = dasar logaritma natural, yaitu 2,71828
x ! = x (x-1) (x-2) . . . 1. (dibaca x faktorial)

Distribusi Poisson adalah distribusi diskrit dengan rata-rata sama dengan varians. Ciri menarik dari proses Poisson adalah bahwa jika banyaknya kedatangan per satuan waktu mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata tingkat kedatangan λ, maka waktu antar kedatangan (inter arrival time) akan mengikuti distribusi eksponensial negatif dengan rata-rata $1/\lambda$.

2. Distribusi waktu pelayanan

Waktu pelayanan dalam proses antrian dapat juaga sesuai atau pas dengan salah satu bentuk distribusi probabilitas. Asumsi yang biasa digunakan bagi distribusi waktu pelayanan adalah distribusi eksponensial negatif. Sehingga jika waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial negatif, maka tingkat pelayanan mengikuti distribusi Poisson. Rumus umum density function probabilitas eksponensial negatif adalah:

$f\ (t) = \mu\ e^{-\mu t}$, dimana t = waktu pelayanan

f (t) = probabilitas yang berhubungan dengan t

μ = rata-rata tingkat pelayanan

$1/\mu$ = rata-rata waktu pelayanan

e = dasar logaritma natural, yaitu 2,71828

Penelitian empiris menunjukkan bahwa asumsi distribusi eksponensial negatif maupun Poisson sering kali tidak absah. Karena itu, asaumsi ini harus diperiksa sebelum mencoba menggunakan suatu model. Pemeriksaan dilakukan melalui test goodness of fit dengan menggunakan distribusi Chi square.

3. Disiplin antri

Suatu tingkah laku pengantri yang dapat mempengaruhi aturan pelayanan adalah pengantri yang tak sabar dan memutuskan untuk meninggalkan system sebelum dilayani, yang dikenal dengan nama *reneging*.

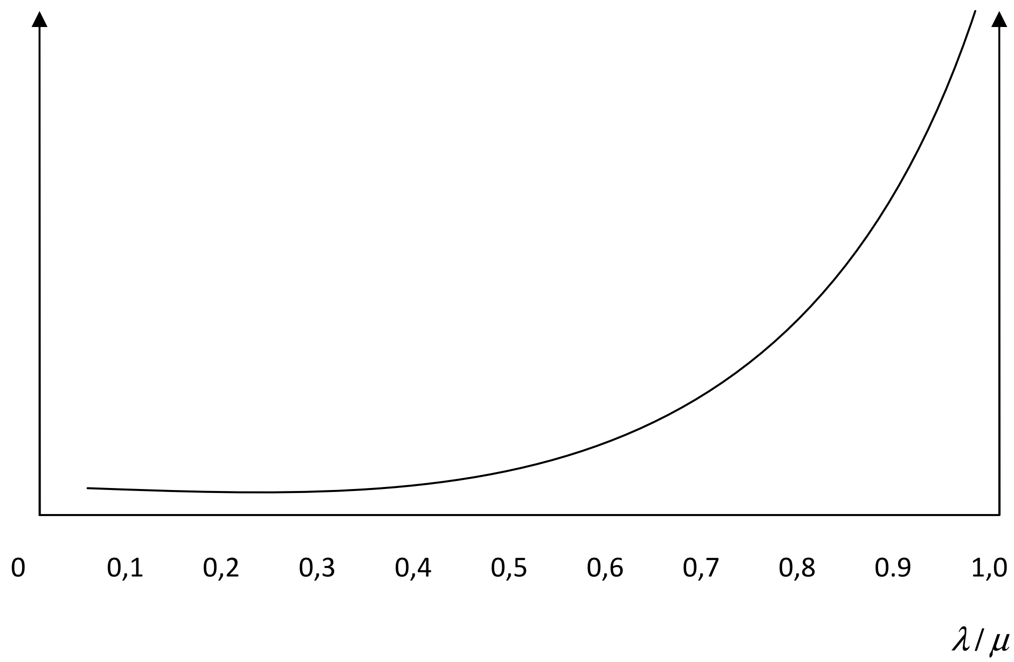
4. Sistem antri steady state dan transient

Steady state diasumsikan bahwa ciri-ciri operasi seperti panjang antrian dan rata-rata waktu menunggu akan memiliki nilai konstan setelah sistem berjalan selama suatu periode waktu. Sistem antrian yang tidak dapat diharapkan berjalan cukup lama dalam keadaan steady state. dinamakan keadaan *transient*. Sistem antrian transient solusinya tergantung pada waktu yang telah dilewati sejak sistem mulai beroperasi.

5. Tingkat kedatangan dan tingkat pelayanan

Diasumsikan bahwa tingkat pelayanan (μ) harus melebihi tingkat kedatangan pengantri (l). Jika tidak, antrian akan makin panjang sehingga tidak ada solusi keseimbangan.

Hubungan antara tingkat kedatangan (λ)dan tingkat pelayanan (μ) dan panjang antrian yang diharapkan ditunjukkan pada gambar. Jika λ kurang dari μ, maka traffic intensity atau utilization faktor R = λ / μ kurang dari 1. Jika rasio ini mendekati 1, panjang antrian yang diharapkan akan mendekati tak terbatas.



Gambar 4. Hubungan Antara Panjang Antrian Dengan Traffic Intencity

6. Proses Kelahiran Murni Dan Kematian Murni

Dalam bagian ini, kita mempertimbangkan dua proses khusus yaitu :

- Para pelanggan tiba dan tidak pernah kembali lagi atau disebut kelahiran murni (*pure birth*)
- Proses kedatangan dan penarikan terjadi dengan cara yang sepenuhnya random ini disebut kematian murni (*pure death*).

7. Model Kelahiran murni

Pertimbangkan situasi pengeluaran akte kelahiran untuk bayi-bayi yang baru lahir. Akte kelahiran ini umumnya disimpan di kantor pusat yang diadministrasi oleh instansi pemerintah. Terdapat alasan untuk mempercayai bahwa kelahiran bayi-bayi yang baru, dan karena itu pengeluaran akte kelahiran, merupakan proses yang sepenuhnya acak yang dapat dijabarkan dengan distribusi posison. Dengan materi sebelumnya dan mengasumsikan bahwa λ adalah laju pengeluaran akte kelahiran, proses kelahiran murni untuk memiiki n kedatangan (akte kelahiran) selama periode t dapat dijabarkan dengan distribusi poison berikut ini :

P_n (t) = $\dfrac{(\lambda t)^n \; e^{-\lambda t}}{n!}$, n = 0, 1, 2, … (kelahiran murni)

dimana λ adalah laju kedatangan per unit waktu dengan jumlah kedatangan yang diperkirakan selama t sebesar λt .

Contoh

Misalkan bahwa kelahiran dalam suatu keadaan tersebar sepanjang waktu sesuai distribusi eksponensial dengan satu kelahiran terjadi setiap 7 menit secara rata rata.

Jawab

Karena waktu antara kedatangan(antar kelahiran) rata rata adalah 7 menit, laju kelahiran dalam keadaan ini dihitung sebagai :

$\lambda = \dfrac{24X60}{7}$ = 205,7 kelahiran/hari

jumlah kelahiran dalam keadaan pertahun diketahui λt = 205,7 x 365 = 75.080 kelahiran/tahun.

Probabilitas tidak adanya kelahiran dalam satu hari tertentu adalah sebesar

$$P_0\,(1) = \frac{(205{,}7X1)^0\ e^{-205{,}7\,X\,1}}{0!} \approx 0$$

anggaplah bahwa kita ingin menghitung probabilitas pengeluaran 45 akte kelahiran diakhir periode yang terdiri dari 3 jam dengan diketahui bahwa 35 akte dikeluarkan dalam 2 jam pertama. Kita amati bahwa karena kelahiran terjadi sesuai proses poisson, probabilitas yang diperlukan berkurang 45 – 35 = 10 kelahiran dalam satu (= 3 –2)jam. Dengan demikian diketahui = 60/7 =8.57 kelahiran/jam, kita peroleh

$$P_{10}\,(1) = \frac{(8{,}57X1)^0\ e^{-8{,}57\,X\,1}}{0!} \approx 0{,}11172$$

Rumus antrian serupa dengan yang diberikan diatas umumnya melibatkan perhitungan yang membosankan, karena itu perhitungan ini digunakan program komputer yang bias memodel kan masalah berikut. Hasil yang akan dilihat adalah $p_n(t)$ dan kumulatif p_n (t) untuk berbagai nilai n.

8. Model Kematian murni

Pertimbangan situasi penyimpanan N unit barang diawal minggu untuk memenuhi permintaan pelanggan selama minggu tersebut. Jika kita mengasumsikan bahwa permintaan perlanggan terjadi dengan laju unit perhari dan bahwa proses permintaan tersebut sepenuhnya acak, probabilitas untuk memperoleh n unit yang tersisa dalam sediaan setelah waktu t diketahui dengan distribusi truncated poisson berikut :

$$P_n\,(t) = \frac{(\mu t)^{N-n}\ e^{-\mu t}}{(N-n)!}, \text{ n = 1, 2, …, N}$$

$$P_n\,(t) = 1 - \sum_{n=1}^{N} P_n\,(t)$$

Contoh

Diawal setiap minggu, 15 unit barang sediaan disimpan untuk dipergunakan selama seminggu tersebut. Penarikan dari sediaan hanya terjadi selama 6 hari pertama (kantor ditutup pada hari minggu) dan mngikuti distribusi poison dengan mean 3 unit/hari. Ketika tingkat sediaan mencapai 5 unit, pesanan baru sebesar15 unit diajukan untuk dikirimkan pada awal minggu berikutnya. Karena sifat barang tersebut, semua unit yang tersisa diakhir minggu dibuang.

Jawab

Kita dapat menganalisis situasi ini dengan sejumlah cara. Seperti kita mengenali bahwa laju konsumsi adalah μ = 3 unit per hari. Anggaplah kita berminat untuk menghitung probabilitas 5 unit(titik pemesanan ulang) di hari t, yaitu

$$P_5\,(t) = \frac{(3t)^{15-5}\ e^{-3t}}{(15-5)!}, \text{ t = 1, 2, 3, …, 6}$$

Sebagai ilustrasi dari perhitungan ini, hasil yang diperoleh secara komputer : dengan menggunakan μ t = 3, 6, 9, …dan 18.

-t (hari)	1	2	3	4	5	6
μt	3	6	9	12	15	18
P_5 (t)	0.0008	0.0413	0.1186	0.1048	0.0486	0.015

Catatan bahwa P_5 (t) mewakili probabilitas pengajuan pemesanan ulang pada hari t. Probabilitas ini memuncak di t = 3 daan lalu menurun sementara kita berlanjut melewati minggu tersebut. Jika kita berminat untuk menghitung probabilitas pemesanan ulang sebelum dan pada hari t, kita harus menghitung probabilitas kumulatif untuk memiliki 5 unit atau kurang pada hari t, yaitu :

$P_{n\le 5}(t) = p_0(t) + p_1(t) + \ldots + p_5(t)$

Dengan menggunakan komputer didapatkan

-t (hari)	1	2	3	4	5	6
μt	3	6	9	12	15	18
$P_{n\le 5}$ (t)	0.0011	0.0839	0.4126	0.7576	0.9301	0.9847

Dapat dilihat dari table bahwa probabilitas pengajuan pesanan sebelum dan pada hari t meningkat secara monoton dengan t.

Satu butir informasi lain yang penting dalam menganalisis situasi ini adalah menentukan jumlah unit sediaan rata-rata yang akan dibuang diakhir minggu. Ini dilakukan dengan menghitung jumlah unit yang diperkirakan tersedia dihari 6; yaitu :

$E\{n \mid t = 6\} = \sum_{n=0}^{15} n\, p_n(6)$

Table berikut meringkas perhitungan dengan diketahui μ t = 18.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P_n (6)	**.0792**	**.0655**	**.0509**	**.0368**	**.0245**	**.015**	**.0083**	**.0042**	**.0018**	**.0007**	**.0002**	**.0001**

Dan p (6) 0; untuk n = 12, 13, 14 dan 15 jadi dengan menghitung rata-rata kita memperoleh :

E{n I t = 6 } = 0.5537 unit

Ini berarti bahwa, secara rata rata, kurang dari satu unit akan dibuang pada setiap akhir minggu.

5. NOTASI KENDALL

Terdapat banyak variasi yang mungkin dari model antrian. Ciri-ciri dari masing-masing model akan diringkas dalam *notasi kendall* yang diperluas. Notasi itu dituliskan:

[a / b / c / d / e / f]

Notasi kendall yang asli adalah: [a / b / c]

Keterangan:

a = distribusi kedatangan

b = distribusi keberangkatan atau waktu pelayanan, untuk a dan b,

M menunjukkan Poisson,

Ek menunjukkan Erlang, dan

D menunjukkan Deterministik atau Konstan.

c = banyaknya pelayanan paralel
d = disiplin antri, seperti FCFS, LCFS, prioritas dan random
e = jumlah maksimum pengantri dalam sistem (antri dan dilayani)
f = jumlah sumber kedatangan
Jika tiga dari notasi Kendall yang diperluas tak disebutkan berarti:
[. / . / . / FCFS / ∞ / ∞]
Artinya disiplin antri FCFS, jumlah maksimum pengantri dalam sistem tak terbatas, dan jumlah sumber kedatangan tak terbatas.

6. MODEL ANTRIAN SATU SALURAN SATU TAHAP [M/M/1]

Pada model ini kedatangan dan keberangkatan mengikuti distribusi Poisson dengan tingkat 1 dan μ, terdapat satu pelayan, kapasitas pelayanan dan sumber kedatangan tak terbatas.

Untuk menentukan operating characteristics atau ciri-ciri operasi, dapat dilakukan dengan mudah setelah diperoleh probabilitas n pengantri dalam sistem (P_n). Melalui penurunan matematik yang cukup panjang, dalam kondisi steady state dapat ditunjukkan bahwa $P_n = (1 - R)\, R^n$, dimana $R = \lambda / \mu \leq 1$ dan n = 0, 1, 2, ...

Bertolak dari rumus itu dapat diperoleh ciri-ciri operasi lain, seperti:

1. Probabilitas terdapat k atau lebih pengantri dalam sistem adalah $P_{n \geq k} = R^k$.
2. Rata-rata banyaknya pengantri dalam sistem
   $$L = \sum_{n=0}^{\infty} nPn = \frac{R}{1-R}$$
3. Rata-rata banyaknya pengantri yang sedang antri
   $$L_q = \frac{R^2}{1-R}$$
4. Rata-rata waktu menunggu dalam sistem
   $$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$
5. Rata-rata waktu antri
   $$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$
6. Proporsi waktu nganggur pelayan
   P_a atau I = 1-R

Contoh:

Penumpang kereta api datang pada sebuah loket mengikuti distribusi Poisson dengan tingkat rata-rata 20 per jam. Misalkan secara rata-rata setiap penumpang dilayani 2 menit dan waktu layanan mengiluti distribusi eksponensial. Setelah sistem dalam steady state, carilah: a) P_4 ; b) L ; c) L_q ; d) W ; e) W_q ; f) P_0 atau I ; g) Berapa probabilitas pengantri tidak mendapat tempat duduk jika kursi yang disediakan di depan loket hanya 3?

Jawab

Tingkat kedatangan rata-rata λ = 20 per jam, dan tingkat pelayanan rata-rata μ = 30 per jam. Sehingga R = 2/3.

a) $P_4 = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{243} = 0{,}066$

b) $L = \frac{2/3}{1 - 2/3} = 2$ penumpang

c) $Lq = \dfrac{4/9}{1-2/3} = 1{,}33$ penumpang

d) $W = \dfrac{1}{30-20} = \dfrac{1}{10}$ jam = 6 menit

e) $W_q = \dfrac{20}{30\ (30-20)} = 4$ menit

f) P_0 atau I = 1-2/3 = 0,33

g) $P_n \geq 5 = (2/3)5 = 0{,}1317$ atau 13%

Misalkan kepala stasiun mengetahui dengan mengganti penjaga loket yang ada dengan penjaga yang lebih trampil, waktu pelayanan berkurang dari rata-rata 2 menit per penumpang menjadi 1,5 menit per penumpang (40 penumpang per jam). Namum upah penjaga yang trampil adalah Rp. 1200 per jam, yang berarti dua kali upah penjaga yang ada. Kepala stasiun juga memperkirakan biaya menunggu pengantri adalah Rp. 50 per menit. Haruskah kepala stasiun mengganti penjaga yang ada dengan penjaga yang lebih trampil?

Jawab

Ciri-ciri sistem yang diperlukan untuk menganalisis masalah itu adalah W_q dan I, yang dihitung seperti berikut:

Kasus 1:

Pelayan yang ada memberikan μ = 30 penumpang.

$W_q = \dfrac{20}{30(30-20)}$ = 1/15 jam = 4 menit

$I = 1 - \dfrac{20}{30} = 33{,}3\%$

Kasus 2:

Pelayan trampil memberikan μ = 40 penumpang

$W_q = \dfrac{20}{40(40-20)}$ = 1/40 jam = 1,5 menit

$I = 1 - \dfrac{20}{40} = 50\%$

Karena tingkat kedatangan rata-rata $\lambda = 20$ per jam dan loket dibuka 8 jam sehari, maka banyaknya pengantri diperkirakan 160. sehingga jumlah waktu menunggu diperkirakan 160 X 4 = 640 menit untuk kasus 1 dan 160 X 1,5 = 240 menit untuk kasus 2. pelayan yang ada dibayar 600 X 8 = Rp. 4.800,- dan pelayan trampil dibayar 1200 X 8 = Rp. 9.600,-. Berikut ditunjukkan ringkasan kedua unsur biaya:

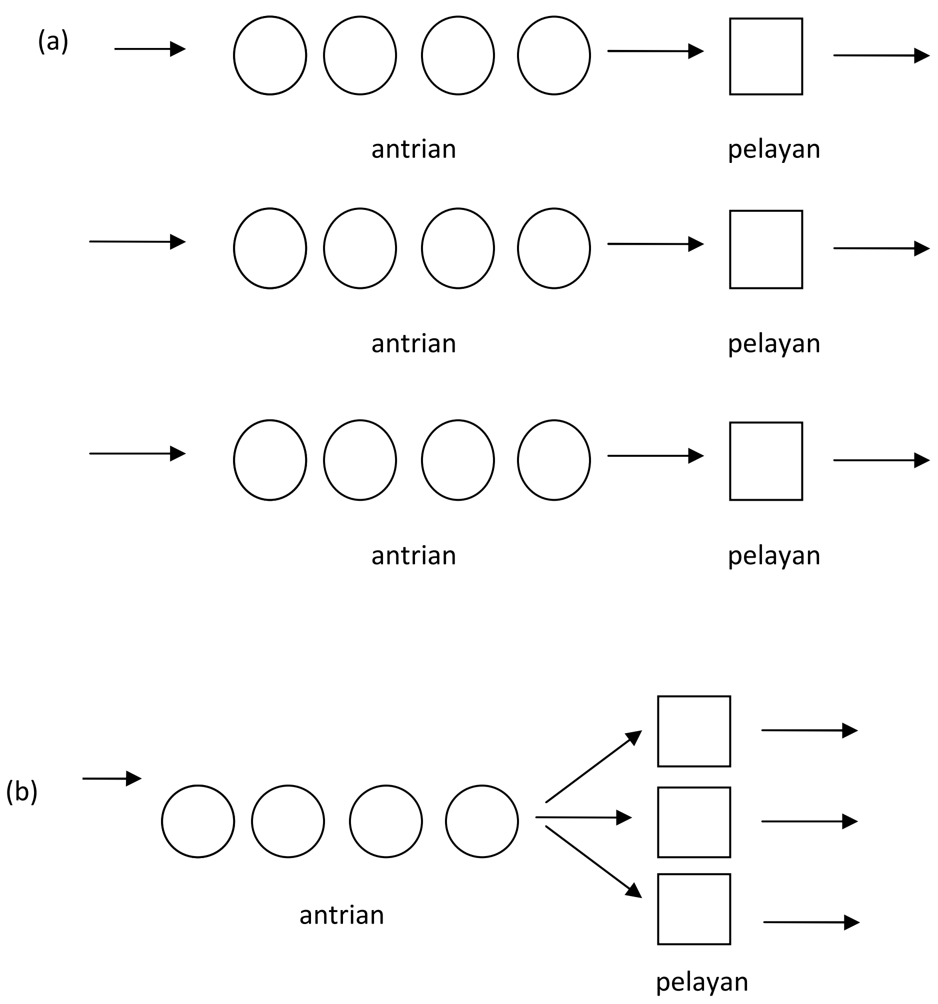
	Kasus 1	Kasus 2
biaya tunggu pengantri	640X50=Rp. 32.000,-	240X50=Rp. 12.000,-
biaya pelayanan	8X600=Rp. 4.800,-	8X1200=Rp. 9.600,-

Sehingga dengan mengganti pelayan yang ada dengan pelayan trampil, kepala stasiun dapat menurunkan biaya tunggu pengantri sebanyak Rp. 20.000,- (=32.000-12.000) dengan peningkatan biaya pelayanan Rp. 4.800,- (= 9600-4800). Jadi penggantian pelayan akan menurunkan biaya total. Tetapi mungkin biaya total bukan satu-satunya pertimbangan dalam merancang fasilitas antri.

7. MODEL ANTRIAN BANYAK SALURAN SATU TAHAP [M/M/c]

Jika *traffic intensity* ($R = 1/\mu$) mendekati satu, rata-rata waktu antri menjadi makin lama dan pengantri dapat menjadi frustasi. Dalam menghadapi kasus ini, dapat diatasi dengan menambah saluran pelayanan.

Ada beberapa cara menambah saluran seperti diilustrasikan pada gambar berikut:



Gambar 5. Struktur Antrian dengan Satu Saluran Serentak dan Banyak Saluran

Struktur proses antrian seperti gambar (a) tersebut tidak dapat dikatakan sebagai struktur antrian banyak saluran, melainkan suatu struktur antrian dengan beberapa saluran tunggal satu tahap yang bekerja secara serentak. Jadi untuk struktur ini dapat dianalisis dengan menerapkan model saluran tunggal.

Struktur antrian banyak saluran satu tahap ditunjukkan pada gambar (b). Ciri struktur ini adalah bahwa hanya ada sebuah antrian di depan fasilitas pelayanan yang berisi banyak saluran atau pelayan. Pengantri akan dilayani jika pelayan siap atas dasar FCFS.

Rumusan *operating characteristics* pada model antrian banyak saluran satu tahap berikut ini didasarkan pada beberapa asumsi, antara lain kedatangan mengikuti distribusi

Poisson, waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponential negatif, *infinite calling population,* panjang antrian tak terbatas, disiplin antri FCFS, rata-rata tingkat pelayanan efektif adalah $c\mu$ dimana c adalah banyaknya saluran dan $c\mu$ lebih besar dari rata-rata tingkat kedatangan (λ), serta distribusi waktu pelayanan adalah sama untuk semua pelayan.

Jika *steady state* tercapai, *operating characteristics* itu adalah:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n\,!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!(1-\lambda/c\mu)}}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0, \ jika\, n \le c \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{c!c^{n-c}} P_0, \ jika\, n > c \end{cases}$$

$$Lq = \frac{P_0\,(\lambda-\mu)^c\ \lambda/c\mu}{c!(1-\lambda/c\mu)^2}$$

$$L = Lq + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda}$$

$$W = Wq + \frac{1}{\mu}$$

Jika c = 1 (artinya hanya ada satu saluran), maka rumus *operating characteristics* itu sama dengan yang ditemui pada model antrian satu saluran-satu tahap [M/M/1].

Contoh

Karena beberapa alasan angkutan kereta api makin diminati. Misalkan kedatangan calon penumpang mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata 75 per jam. Misalkan lagi, waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial negatif dengan rata-rata 2 menit. Jika dibuka 3 loket, setelah steady state tercapai carilah operating *characteristics*nya.

Jawab

Diketahui $\lambda = 75$; $\mu = 30$; c = 3 sehingga c $\mu = 90$ dan R = $\frac{75}{90} = 0{,}8333$

$$P_0 = \frac{1}{\frac{(75/30)^0}{0!} + \frac{(75/30)^1}{1!} + \frac{(75/30)^2}{2!} + \frac{(75/30)^3}{3\,!\,(1-75/90)}}$$

$$= \frac{1}{6{,}6625 + 15{,}625} = 0{,}0449$$

$L_q = \frac{(0{,}0449)\,(75/30)^3\ (75/90)}{3!\,(1-75/90)^2} = 3{,}5$ calon penumpang menunggu

$L = 3{,}5 + \frac{75}{30} = 6$ calon penumpang dalam sistem

$W_q = \frac{3,5}{75} = 0,0467$ jam = 2,8 menit menunggu

$W = 0,0467$ jam + $\frac{1}{30}$ jam = 4,8 menit dalam sistem

Jika kepala stasiun ingin mengganti pelayan atau mengubah jumlah loket, maka operating characteristics yang baru perlu ditemukan untuk membantu mengevaluasi perubahan biaya pelayanan dan biaya menunggu. Dengan demikian, tingkat pelayanan yang diharapkan lebih menguntungkan dari segi biaya dapat diketahui.