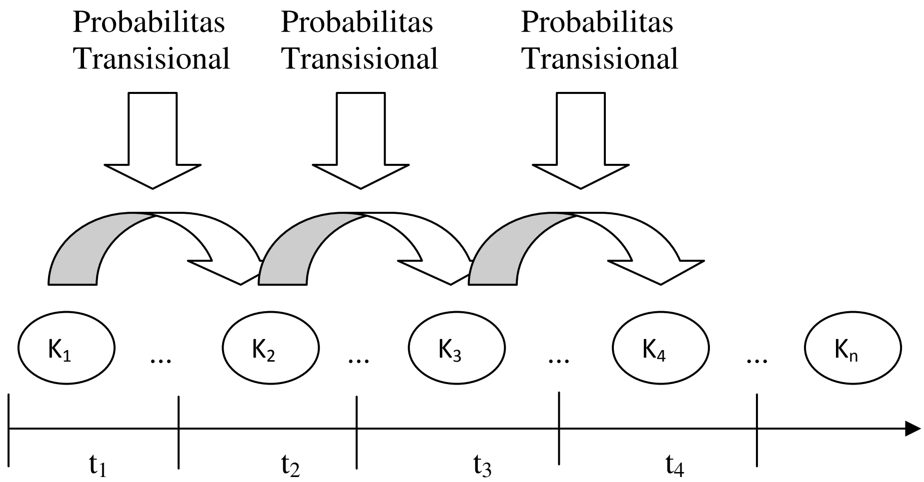
BAB 7
Rantai Markov

Rantai Markov (*Markov Chains*) adalah suatu teknik matematika yang biasa digunakan untuk melakukan pemodelan (*modelling*) bermacam-macam sistem dan proses bisnis. Teknik ini dapat digunakan untuk memperkirakan perubahan-perubahan di waktu yang akan datang dalam variabel-variabel dinamis atas dasar perubahan-perubahan dari variabel-variabel dinamis tersebut di waktu yang lalu. Teknik ini dapat digunakan juga untuk menganalisis kejadian-kejadian di waktu-waktu mendatang secara matematis.
Model Rantai Markov ditemukan oleh seorang ahli Rusia yang bernama A.A. Markov pada tahun 1906, yaitu:

"Untuk setiap waktu t, ketika kejadian adalah K_t dan seluruh kejadian sebelumnya adalah $K_{t(j)}$, ... , $K_{t(j-n)}$ yang terjadi dari proses yang diketahui, probabilitas seluruh kejadian yang akan datang $K_{t(j)}$ hanya bergantung pada kejadian $K_{t(j-1)}$ dan tidak bergantung pada kejadian-kejadian sebelumnya yaitu $K_{t(j-2)}$, $K_{t(j-3)}$,..., $K_{t(j-n)}$."

Gambaran mengenai rantai Markov ini kemudian dituangkan dalam Gambar 1 dimana gerakan-gerakan dari beberapa variabel di masa yang akan datang bisa diprediksi berdasarkan gerakan-gerakan variabel tersebut pada masa lalu. K_{t4} dipengaruhi oleh kejadian K_{t3}, K_{t3} dipengaruhi oleh kejadian K_{t2} dan demikian seterusnya dimana perubahan ini terjadi karena peranan probabilitas transisi (*transition probability*). Kejadian K_{t2} misalnya, tidak akan mempengaruhi kejadian K_{t4}.



Gambar 1 Peristiwa dalam Rantai Markov

Kejadian-kejadian di atas sifatnya berantai. Oleh karena itu, teori ini dikenal dengan nama Rantai Markov. Dengan demikian, Rantai Markov akan menjelaskan gerakan-gerakan beberapa variabel dalam satu periode waktu di masa yang akan datang berdasarkan pada gerakan-gerakan variabel tersebut di masa kini. Secara matematis dapat ditulis:

$$K_{t(j)} = P \times K_{t(j-1)}$$

dimana,

$K_{t(j)}$ = peluang kejadian pada t(j)
P = Probabilitas Transisional
t(j) = waktu ke-j

Peluang kejadian $K_{t(j)}$ dinyatakan ke dalam bentuk vektor sehingga jumlah seluruh selnya akan selalu 100%.

1. Probabilitas Absolut dan Transisi

Dengan diketahui $\{a_j^{(0)}\}$ dan P dari sebuah rantai Markov, probabilitas absolut dari sistem tersebut setelah sejumlah transisi tertentu ditentukan sebagai berikut. Anggaplah $\{a_j^{(0)}\}$ adalah probabilitas absolut dari sistem tersebut setelah n transisi, yaitu pada saat t_n. Ekspresi umum dari $\{a_j^{(0)}\}$ dalam bentuk $\{a_j^{(0)}\}$ dan P dapat ditemukan sebagai berikut.

$$a_j^{(1)} = a_1^{(0)} P_{1j} + a_2^{(0)} P_{2j} + a_3^{(0)} P_{3j} + \ldots = \sum a_i^{(0)} P_{ij}$$

Juga

$$a_j^{(2)} = \sum_i a_i^{(1)} P_{ij} = \sum_i (\sum_k a_k^{(0)} P_{ki}) P_{ij} = \sum_k a_k^{(0)} (\sum_i P_{ki} P_{ij}) = \sum_k a_k^{(0)} P_{kj}^{(2)}$$

dimana $P_{kj}^{(2)} = \sum_i P_{ki} P_{ij}$ adalah probabilitas transisi dua langkah atau order kedua (*two step* atau *second-order transition probability*), yaitu probabilitas untuk bergerak dari keadaan k ke keadaan j dalam tepat dua transisi.

Demikian pula dapat diperlihatkan berdasarkan induksi bahwa

$$a_j^{(n)} = \sum_i a_i^{(0)} (\sum_k P_{ik}^{(n-1)} P_{kj} = \sum_i a_i^{(0)} P_{ij}^{(n)}$$

dimana $P_{ij(n)}$ adalah probabilitas transisi n langkah atau order n dengan diketahui rumus rekursif

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_k P_{ik}^{(n-1)} P_{kj}$$

Secara umum, untuk semua i dan j

$$\boxed{P_{ij}^{(n)} = \sum_k P_{ik}^{(n-m)} P_{kj}^{(m)}, \qquad 0 < m < n}$$

Persamaan-persamaan ini dikenal sebagai persamaan **Chapman-Kolmogorov**.

Elemen-elemen dan matriks transisi yang lebih tinggi $\|P_{ij(n)}\|$ dapat diperoleh secara langsung dengan perkalian matriks. Jadi

$$\| P_{ij}^{(2)} \| = \| P_{ij} \| \| P_{ij} \| = P^2$$
$$\| P_{ij}^{(3)} \| = \| P_{ij}{}^2 \| \| P_{ij} \| = P^3$$

dan secara umum,

$$\| P_{ij}^{(n)} \| = P^{n-1} P = P^n$$

Jadi, jika probabilitas absolut didefinisikan dalam bentuk vektor sebagai

$$a^{(n)} = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \ldots\}$$

Maka $\quad a^{(n)} = a^{(0)} P^n$

Contoh

Pertimbangkan rantai Markov berikut ini dengan dua keadaan $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

dengan $a^{(0)} = (7 \;\; 3)$. Tentukan $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$

solusi

$$P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & 48 \\ 36 & 64 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = P^2P^2 = \begin{pmatrix} 52 & 48 \\ 36 & 64 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 52 & 48 \\ 36 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 443 & 557 \\ 417 & 583 \end{pmatrix}$$

$$P^8 = P^4P^4 = \begin{pmatrix} 443 & 557 \\ 417 & 583 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 443 & 557 \\ 417 & 583 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4281 & 5719 \\ 4274 & 5726 \end{pmatrix}$$

jadi

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 68 \end{pmatrix}$$

$$a^{(4)} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 443 & 557 \\ 417 & 583 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 435 & 565 \end{pmatrix}$$

$$a^{(8)} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4281 & 5719 \\ 4274 & 5726 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4279 & 5721 \end{pmatrix}$$

Hasil yang menarik adalah bahwa baris-baris dari P^8 cenderung identik. Juga, a^8 cenderung identik dengan baris-baris dari P^8. Hasil ini berkaitan dengan sifat jangka panjang dari rantai Markov, hasil tersebut menyiratkan bahwa probabilitas absolut jangka panjang tidak bergantung dari $a^{(0)}$. Dalam kasus ini, probabilitas yang dihasilkan dikenal sebagai steady-state probabilities.

2. Rantai Markov yang irreducible

Sebuah rantai Markov dikatakan Irreducible, jika setiap keadaan E_j dapat dicapai dari setiap keadaan lain E_i setelah sejumlah terbatas transisi, yaitu untuk
$i \neq j$.

$$P_{ij}^{(n)} > 0, \text{ untuk } 1 \leq n < \infty$$

Dalam kasus ini semua keadaan dalam rantai tersebut berkomunikasi.

3. Himpunan Tertutup dan Keadaan yang Menyerap

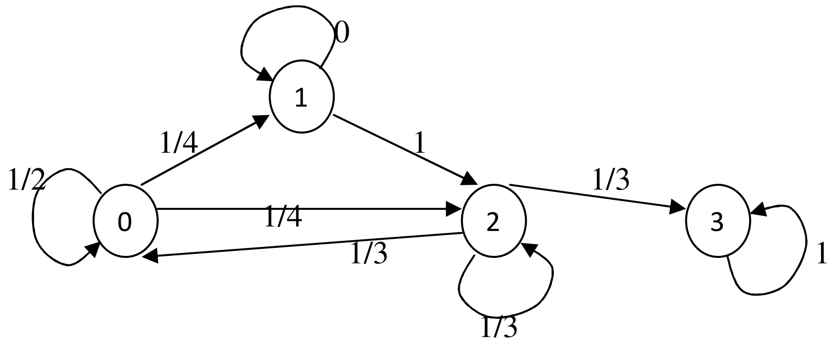
Dalam rantai Markov, himpunan C dari keadaan-keadaan dikatakan tertutup jika sistem tersebut, begitu berada dalam satu keadaan C akan tetap berada dalam C. Sebuah contoh kasus dari sebuah himpunan tertutup adalah satu keadaan E_j dengan probabilitas transisi $P_{ij} = 1$. Dalam kasus ini, E_j dikatakan keadaan yang menyerap (*absorbing state*). Semua keadaan dari sebuah rantai yang bersifat irreducible pasti membentuk sebuah himpunan tertutup dan tidak ada sub-himpunan lain yang dapat tertutup. Himpunan tertutup C juga memenuhi semua kondisi dari sebuah rantai Markov dan karena itu dapat dipelajari secara independen.

Contoh

Pertimbangkan rantai Markov berikut ini:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rantai ini diilustrasikan secara grafik dalam gambar.2. Gambar ini memperlihatkan bahwa keempat keadaan ini tidak membentuk sebuah rantai yang irreducible, karena keadaan 0, 1, dan 2 tidak dapat dicapai dari keadaan 3. Keadaan 3 secara sendirian membentuk sebuah himpunan tertutup dan karena itu menyerap. Kita dapat juga mengatakan bahwa keadaan 3 membentuk sebuah rantai yang irreducible.



Gambar 2. Proses Model Rantai Markov

4. Menyusun Matriks Probabilitas Transisi

Untuk menggambarkan proses Markov, akan disajikan suatu contoh masalah tentang kegiatan-kegiatan pemilihan merek dan peramalan probabilitas transisi yang kemungkinan dilakukan para konsumen, yaitu pergantian dari satu merek ke merek lain. Anggapan bahwa sampel konsumen terdiri dari kombinasi 1000 responden yang tersebar pada 4 merek, A, B, C, dan D. Anggapan selanjutnya adalah bahwa sampel tersebut telah mewakili keseluruhan kelompok dalam kesetiaanya terhadap suatu merek dan pola pergantian dari satu merek ke merek lain. Konsumen berpindah dari satu merek ke merek lain dapat karena periklanan, promosi khusus, harga, ketidakpuasan, dan lain-lain.

Dalam Tabel 1, sebagian besar pelanggan yang mula-mula membeli merek A, tetap memilih merek tersebut pada periode kedua. Meskipun demikian, ada 50 konsumen tambahan dibanding 45 konsumen yang berpindah dari merek A ke merek-merek lain.

Tabel 1. Perubahan Pelanggan

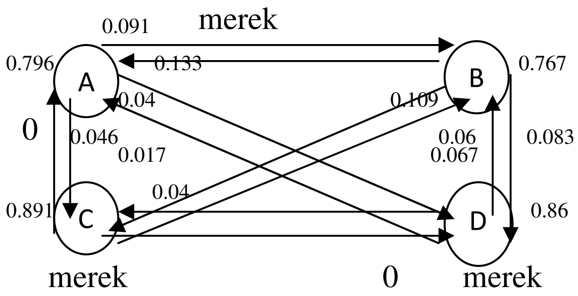
`	Periode Pertama	Perpindahan				Peride Kedua
		A	B	C	D	
A	220	175	40	0	10	225
B	300	20	230	25	15	290
C	230	10	5	205	10	230
D	250	15	25	2	215	255
JML	1000	220	300	230	250	1000

Meskipun kita mempunyai informasi pola perpindahan merek langganan dalam tabel di atas, tetapi tidak ada perubahan pada jumlah dan total pelanggan. Hal ini merupakan karakteristik dasar proses-proses Markov, yaitu serangkaian perubahan progresif dan saling ketergantungan.

Selanjutnya adalah kita bentuk probabilitas transisi dan matriksnya

Matriks Probabilitas Transisi

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 175 & 40 & 0 & 10 \\ 20 & 230 & 25 & 15 \\ 10 & 5 & 205 & 10 \\ 15 & 25 & 0 & 215 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.796 & 0.133 & 0.000 & 0.040 \\ 0.091 & 0.767 & 0.109 & 0.060 \\ 0.046 & 0.017 & 0.891 & 0.040 \\ 0.067 & 0.083 & 0.000 & 0.860 \end{pmatrix}$$



Gambar.3. Perhitungan merek oleh pelanggan merek

Perhitungan Matriks Probabilitas Transisi

Merek				
	A	B	C	D
A	175/220 = 0,796	40/300=0,133	0/230=0	10/250=0,040
B	20/220=0,091	230/300=0,767	25/230=0,109	15/250=0,060
C	10/220=0,046	5/300=0,017	205/230=0,891	10/250=0,040
D	15/220=0,067	25/300=0,083	0/230=0	215/250=0,860

Data ini dapat meramalkan tingkat di mana suatu merek akan mendapatkan atau kehilangan *market share*-nya dan dapat menunjukan kemungkinan market share ekuilibrium di waktu yang akan datang sehingga manajemen dapat mengarahkan usaha-usaha promosinya.

5. *First-Order* dan *High-Order* Analisa Markov

Proses Markov dapat berbeda order. *First-Order* hanya mempertimbangkan pilihan-pilihan merek yang dibuat selama suatu periode untuk penentuan probabilitas pilihan dalam periode berikutnya. *Second-order* analisa Markov menganggap pilihan-pilihan untuk suatu merek tertentu dalam periode berikutnya tergantung pada pilihan-pilihan merek yang dibuat oleh para pelanggan selama dua periode terakhir. Begitu juga untuk *third-order*, proses Markov yang digunakan untuk meremal perilaku periode berikutnya terhadap merek-merek tertentu berdasarkan pola pemilihan merek para pelanggan selama dua periode terakhir.

Banyak riset pemasaran telah membuktikan bahwa penggunaan anggapan first-order untuk maksud-maksud peramalan adalah valid.

6. Menghitung Kemungkinan Market Share di Waktu yang Akan Datang

Market Share untuk merek A, B, C, dan D sekarang adalah 22, 30, 23, dan 25 persen untuk periode pertama. Manajemen akan memperoleh manfaat bila mereka mengetahui berapa market sharenya di periode waktu yang akan datang. Perhitungan market share yang mungkin untuk merek A, B, C, dan D dalam periode kedua dapat diperoleh dengan mengalikan matriks probabilitas transisi dengan market share pada periode pertama.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0.796 & 0.133 & 0.000 & 0.040 \\ 0.091 & 0.767 & 0.109 & 0.060 \\ 0.046 & 0.017 & 0.891 & 0.040 \\ 0.067 & 0.083 & 0.000 & 0.860 \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{pmatrix} 0.22 \\ 0.30 \\ 0.23 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.225 \\ 0.290 \\ 0.230 \\ 0.255 \end{pmatrix}$$

Setelah pemecahan untuk periode kedua, periode ketiga dapat ditentukan dengan dua cara. Metode pertama adalah kelanjutan pendekatan perhitungan terdahulu, mengalikan matriks probabilitas transisi mula-mula dengan *market share* periode kedua yang akan menghasilka *market share* periode ketiga. Metode kedua adalah mengkuadratkan matriks probabilitas transisi untuk jumlah periode yang diinginkan kemudian mengalikan matriks yang dihasilkan dengan *market share* awal.

Perhitungan Metode Pertama

Perkalian matriks digunakan lagi untuk mencari market share setiap merek.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0.796 & 0.133 & 0.000 & 0.040 \\ 0.091 & 0.767 & 0.109 & 0.060 \\ 0.046 & 0.017 & 0.891 & 0.040 \\ 0.067 & 0.083 & 0.000 & 0.860 \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{pmatrix} 0.225 \\ 0.290 \\ 0.230 \\ 0.255 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.228 \\ 0.283 \\ 0.231 \\ 0.258 \end{pmatrix}$$

Perhitungan Metode Kedua

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0.796 & 0.133 & 0.000 & 0.040 \\ 0.091 & 0.767 & 0.109 & 0.060 \\ 0.046 & 0.017 & 0.891 & 0.040 \\ 0.067 & 0.083 & 0.000 & 0.860 \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{pmatrix} 0.796 & 0.133 & 0.000 & 0.040 \\ 0.091 & 0.767 & 0.109 & 0.060 \\ 0.046 & 0.017 & 0.891 & 0.040 \\ 0.067 & 0.083 & 0.000 & 0.860 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.6484 & 0.2112 & 0.0145 & 0.742 \\ 0.1513 & 0.6073 & 0.1808 & 0.1056 \\ 0.0818 & 0.0375 & 0.7957 & 0.0729 \\ 0.1185 & 0.1440 & 0.0090 & 0.7473 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6484 & 0.2112 & 0.0145 & 0.0742 \\ 0.1513 & 0.6073 & 0.1808 & 0.1056 \\ 0.0818 & 0.0375 & 0.7957 & 0.0729 \\ 0.1185 & 0.1440 & 0.0090 & 0.7473 \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{pmatrix} 0.22 \\ 0.30 \\ 0.23 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.228 \\ 0.283 \\ 0.231 \\ 0.258 \end{pmatrix}$$

7. Menentukan Kondisi Ekuilibrium

Ekuilibrium adalah istilah untuk menandai terjadinya keseimbangan antara dua kekuatan yang saling mencari kondisi yang saling menguntungkan bagi masing-masing. Misalnya, keseimbangan pasar antara permintaan dan penawaran. Dalam pembahasan rantai Markov ini, keseimbangan itu akan menjelaskan bagaimana perubahan-perubahan variabel di dalam sistem itu akhirnya membawa $K_{t(j)}$ dalam kondisi yang tidak berubah-ubah lagi atau stabil. Secara matematis, jika $K_{t(j)} = P \times K_{t(j-1)}$ maka kondisi ekuilibrium akan tercapai jika :

$$K_{t(eq)} = P \times K_{t(eq)}$$

Contoh

Perusahaan G mempunyai dua pesaing dalam suatu segmen pasar dunia bisnisnya. Pada tahun ini, *market share* yang dikuasai masing-masing perusahaan adalah sebagai berikut: Perusahaan G 30%, pesaing A 20% dan pesaing B 50%. Matriks probabilitas transisi (rantai Markov *first order*), yang menujukan arus para pelanggan adalah sebagai berikut:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} G & A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Persamaan untuk *market share* perusahaan G pada ekulibrium sama dengan 0.6 bagian yang dikuasai dalam periode ekuilibrium sebelumnya (atau eq.-1) ditambah 0.2 bagian pesaing A pada periode ekulibrium dikurangi satu periode dan 0.2 bagian pesaing B pada periode ekulibrium dikurangi satu periode. Persamaan tersebut dapat ditulis:

$G_{eq.-1} = 0.6\ G_{eq.-1} + 0.2\ A_{eq.-1} + 0.2\ B_{eq.-1}$

Bentuk persamaan yang sama dapat dibuat untuk kedua pesaing. Tiga persamaan dalam contoh dapat dinyatakan berikut ini:

I. $G = 0.6\ G + 0.2\ A + 0.2\ B$

II. $A = 0.1\ G + 0.6\ A + 0.2\ B$

III. $B = 0.3\ G + 0.2\ A + 0.6\ B$

IV. $1.0 = G + A + B$ (persamaan ini menunjukan bahwa total ketiga *market share* baru = 1)

Dengan ada bilangan yang sama pada kedua sisi persamaan, dapat dihasilkan persamaan yang menunjukan tambahan dan kehilangan untuk setiap perusahaan sebagai berikut:

I. $0 = -0.4\ G + 0.2\ A + 0.2\ B$

II. $0 = 0.1\ G - 0.4\ A + 0.2\ B$

III. $0 = 0.3\ G + 0.2\ A - 0.4\ B$

IV. $1.0 = G + A + B$

Dari persamaan I dan III

$0 = -0.4\ G + 0.2\ A + 0.2\ B$

$\underline{0 = 0.3\ G + 0.2\ A - 0.4\ B}$ -

$0 = -0.7\ G + 0.6\ B$

$0.7\ G = 0.6\ B$

$G = 0.857\ B$

Persamaan III dikalikan 4/3
0 = -0.4 G + 0.2 A + 0.2 B
0 = 0.4 G + 0.267 A – 0.533 B -
0 = 0.467 A – 0.333 B
0.467 A = 0.333 B
A = 0.715 B

Substitusikan nilai-nilai G dan A
1 = G + A + B
1 = 0.857 B + 0.715 B + 1.0 B
1 = 2.572 B
B = 0.389 (B pada ekuilibrium)

Kemudian menentukan nilai-nilai G dan A
G = 0.857 x 0.389 = 0.333 (G pada ekuilibrium)
A = 0.715 x 0.389 = 0.278 (A pada ekuilibrium)

Untuk membuktikan bahwa telah tercapai kondisi ekuilibrium adalah dengan mengalikan matriks probabilitas transisi dengan market share ekuilibrium. Ini dapat dihitung dengan menggunakan aljabar matriks dan ditunjukan sebagai berikut:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} G & A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{pmatrix} 0.333 \\ 0.278 \\ 0.389 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.333 \\ 0.278 \\ 0.389 \end{pmatrix}$$

8. Ekuilibrium Markov dengan Program Lindo

Ekuilibrium Markov juga dapat diselesaikan dengan menggunakan program Lindo. Karena program ini menghendaki format input baku, maka kita gunakan persamaan V-VIII.

Output Program Lindo untuk ekuilibrium Markov

```
max Geq + Aeq + Beq
st
 -0.4 Geq + 0.2 Aeq + 0.2 Beq = 0
 0.1 Geq - 0.4 Aeq + 0.2 Beq =0
 0.3 Geq + 0.2 Aeq - 0.4 Beq =0
Geq + Aeq + Beq =1
End

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      1.000000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       GEQ         0.333333          0.000000
       AEQ         0.277778          0.000000
       BEQ         0.388889          0.000000
```

```
        ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
         2)         0.000000         0.000000
         3)         0.000000         0.000000
         4)         0.000000         0.000000
         5)         0.000000         1.000000


 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
      GEQ        1.000000         INFINITY         INFINITY
      AEQ        1.000000         INFINITY         INFINITY
      BEQ        1.000000         INFINITY         INFINITY

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
        2        0.000000         0.000000         0.000000
        3        0.000000         0.000000         0.000000
        4        0.000000         0.000000         0.000000
        5        1.000000         INFINITY         1.000000
```

Makna hasil perhitungan Program Lindo diserahkan kepada pembaca.